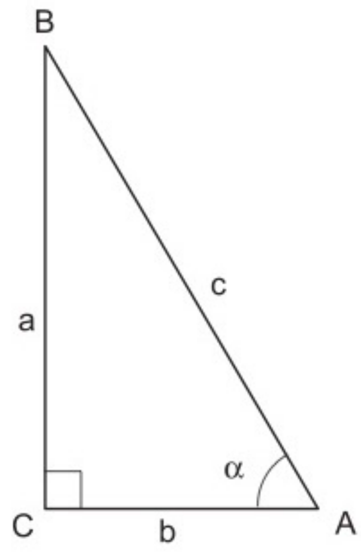
Планиметрия

Треугольники и их свойства

Прямоугольный треугольник

Треугольник называется **прямоугольным**, если у него есть прямой угол, то есть угол в 90° (или $\frac{\pi}{2}$). Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется гипотенузой, две другие стороны называются катетами.

Обозначения



a, b – длины катетов прямоугольного треугольника,

c – длина гипотенузы прямоугольного треугольника,

α, β, γ – величины соответствующих противоположных им углов,

p – полупериметр треугольника,

R – длина радиуса описанной около треугольника окружности,

r – длина радиуса вписанной в треугольник окружности,

h_a, h_b, h_c – длины высот, проведённых к сторонам, длины которых равны a, b, c соответственно,

m_a, m_b, m_c – длины медиан, проведённых к сторонам, длины которых равны a, b, c соответственно.

Соотношения между длинами сторон и величинами углов в прямоугольном треугольнике

Синус величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **противолежащего** этому углу, к длине гипотенузы.

Косинус величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **прилежащего** к этому углу, к длине гипотенузы.

Тангенс величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **противолежащего** этому углу, к длине катета, прилежащего к этому углу.

Котангенс величины острого угла прямоугольного треугольника равен отношению длины катета, **прилежащего** к этому углу, к длине катета, противолежащего этому углу.

Замечание. Если вы постоянно путаете синус с косинусом, а именно где прилежащий катет, а где противолежащий, то можно для себя запомнить: «ко» – значит косание. Хотя слово и написано с ошибкой, но это помогает не путать.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Замечание. Теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов.

Теорема (обратная). Если квадрат длины стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон, то такой треугольник прямоугольный.

Основные линии треугольника

Медиана

Теорема (требуется доказательство). Длина медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы:

$$m_c = \frac{c}{2}.$$

Теорема (обратная). Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Длина медианы, проведённой к катету, равна корню из суммы четверти квадрата длины этого катета и квадрата длины другого катета:

$$m_a = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}, m_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Замечание. Две последние формулы являются частными случаями формулы квадрата медианы треугольника.

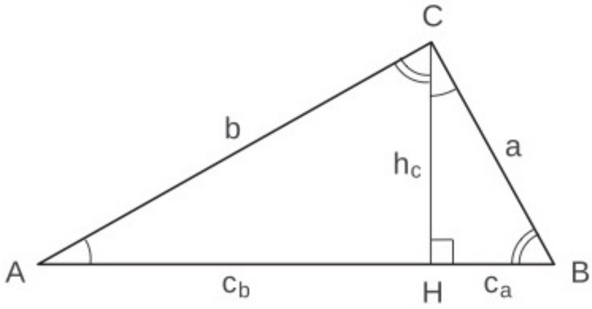
Высота

- Высоты, проведенные к катетам прямоугольного треугольника совпадают с самими катетами, т. е. $h_a = b$, $h_b = a$, так как перпендикулярны друг другу.

- Длина высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна частному произведения длин катетов и длины гипотенузы. Обратное тоже верно.

$$h_c = \frac{ab}{c}$$

- Квадрат длины высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению длин отрезков гипотенузы, на которые её делит основание этой высоты. Обратное тоже верно.



$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{c_a c_b}$$

Замечание. Первое равенство не используется без вывода. Для его доказательства достаточно записать площадь прямоугольного треугольника двумя способами: $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$.

Справедливость второго равенства следует из подобия треугольников, на которые высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает исходный треугольник.

Формулы и соотношения

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Два прямоугольных треугольника равны, если у них соответственно равны:

- катет и гипотенуза;
- гипотенуза и острый угол;
- катеты;
- катет и острый угол.

Подобие прямоугольных треугольников

Два прямоугольных треугольника подобны, если выполняется одно из следующих условий, называемых признаками подобия:

- если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника;

- если два катета одного прямоугольного треугольника пропорциональны двум катетам другого прямоугольного треугольника;

- если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника.

Замечание. Признаки равенства и подобия прямоугольного треугольника являются следствием общих признаков и не требуют отдельного места в вашей памяти.

Формула площади прямоугольного треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab,$$

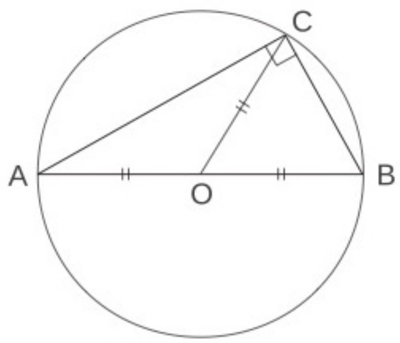
где a и b – длины катетов прямоугольного треугольника.

Замечание. Данная формула является частным случаем формулы $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, так как $\gamma = 90°$ или $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$, так как $h_a = b$, $h_b = a$.

Важно. Все формулы для площади произвольного треугольника применимы для прямоугольного треугольника!

Окружность, описанная около прямоугольного треугольника

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится на середине его гипотенузы; длина радиуса этой окружности равна половине длины гипотенузы и равна длине медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе:



$$R = m_c = \frac{c}{2}.$$

Замечание. Верно и обратное утверждение: если у некоторого треугольника центр описанной около него окружности находится на середине одной из его сторон (что эквивалентно тому, что длина радиуса этой окружности равна половине длины одной из его сторон), то этот треугольник прямоугольный.

Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник

Длина радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равна полуразности суммы длин его катетов и длины его гипотенузы:

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Замечание. Обратное утверждение опять-таки верно: если длина радиуса окружности, вписанной в некоторый треугольник, может быть вычислена как полуразность суммы длин двух его сторон и длины его третьей стороны, то этот треугольник – прямоугольный.

Данная формула может быть использована только с доказательство её вывода.

Важно. Все свойства, теоремы и формулы для произвольного треугольника применимы для прямоугольного треугольника!

Использованные материалы:

- Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 383 с. : ил.

- Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 22-е изд. – М. : Просвещение, 2013. – 255 с. : ил. – (МГУ – школе).

- Математика. Полный курс для девятиклассника с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под ред. М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2018. — 704 с. : ил. – (ВМК МГУ – школе)

- Математика. Сборник задач по базовому курсу [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю.А.Попов, Н.Л. Семендяева, М.В. Федотов ; под ред. М.В.Федотова.—Эл. изд.—Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf :

243с.).—М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — (ВМК МГУ — школе).

- Математика. Сборник задач по углублённому курсу [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Б. А. Будак [и др.] ; под ред. М. В. Федотова. — 3-е изд. (эл.).—Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 329с.).— М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.— (ВМК МГУ — школе).

- ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2019. — 272 с.